Annexe 7
(Chapitre 4)

Le modèle de Stiglitz.

L'hypothèse de substituabilité entre capital artificiel et capital naturel permet à la théorie néo-classique de conserver l'identité entre croissance de la consommation par tête et amélioration du bien-être collectif. Stiglitz[1] montre que, dans le cadre d'une fonction de Cobb-Douglas, une augmentation de la consommation par tête, et par suite de la satisfaction, est non seulement possible mais optimale, dans le sens où l'on peut maximiser la somme des bénéfices nets actualisés à travers toutes les générations, à la condition que le rapport entre le taux de croissance du progrès technique et la part de la ressource naturelle dans le produit soit suffisamment élevé. Il est donc postulé que le progrès technique permettra toujours de retirer une satisfaction plus grande d'un flux de ressources toujours plus faible. Nous avons montré que la fonction principale du concept de soutenabilité faible était de préserver celui de croissance. Comment le modèle de Stiglitz s'inscrit-il dans cette démarche?

En appelant:

Q : la quantité produite utilisée soit pour la consommation C soit pour l'augmentation de capital $\dot{K}$,

L , K , E : les quantités de facteurs travail, capital et environnement utilisés,

α , β, γ : les élasticités partielles de la fonction de production par rapport à chaque facteur, avec $\alpha + \beta + \gamma = 1$ (rendements d'échelle constants),

λ : le taux de progrès technique supposé constant,

t : le temps,

n : taux de croissance démographique qui conditionne le taux de croissance de l'offre de travail,

[1]. STIGLITZ J., *Growth with exhaustible natural resources: efficient and optimal growth paths*, Review of Economic Studies, op. cit.

Cf. également TOMAN M.A., PEZZEY J., KRAUTKRAEMER J., *Neoclassical economics and "sustainability"*, op. cit., traduit sous le titre: *L'économie néo-classique face à la "soutenabilité"*, op. cit.

C : la consommation,

s : le taux d'épargne égal à $\dot{K}/Q$, c'est-à-dire au taux d'investissement net,

χ : la propension moyenne à consommer, avec $\chi + s = 1$,

i : le taux d'intérêt égal à la productivité marginale du capital $\beta \frac{Q}{K} = \beta\,\theta$ qui sert de taux d'actualisation et qui est aussi égal au taux d'accroissement du prix de la ressource environnementale en concurrence parfaite,

θ : la productivité moyenne du capital Q/K égale à l'inverse du coefficient de capital, avec $C/K = \chi\,\theta$,

μ : le taux d'utilisation de la ressource environnementale égal au rapport E/E_d de la quantité utilisée E et du stock disponible E_d au départ,

p : le prix de la ressource environnementale égal à la productivité marginale de celle-ci $\gamma \frac{Q}{E}$,

g (indicé par le symbole de la variable): le taux de croissance de la variable correspondante, égal à la dérivée logarithmique par rapport au temps de la variable, par exemple pour la variable Q : $g_Q = \frac{dQ/dt}{Q} = \frac{\dot{Q}}{Q} = \frac{dLnQ}{dt}$;

le modèle s'exprime par les relations suivantes:

(1) $Q = f(L, K, E, t) = L^{\alpha} K^{\beta} E^{\gamma} e^{\lambda t}$,

et en différenciant logarithmiquement,

(2) $g_Q = \alpha\, g_L + \beta\, g_K + \gamma\, g_E + \lambda$, avec $g_L = n$, et $g_K = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{K}}{Q}\frac{Q}{K} = s\,\theta$,

(3) $g_p = \beta\,\theta = g_Q - g_E$,

(4) $g_\mu = g_E - g_{E_d} = g_E + \mu$,

(5) $g_\theta = g_Q - g_K$,

(6) $g_C = g_\chi + g_Q$, avec g_C = taux de croissance de la consommation
et g_χ = taux de croissance de la propension à consommer,

on déduit de (2) et de (3):

(7) $g_Q = \alpha\, n + \beta\,\theta\, s + \gamma\left(g_Q - \beta\,\theta\right) + \lambda$,

(8)

$$g_Q = \frac{\alpha\, n + \lambda + \beta\, \theta\, (s - \gamma)}{1 - \gamma} = \frac{\alpha\, n + \lambda + \beta\, \theta\, (1 - \chi - \gamma)}{1 - \gamma} = \frac{\alpha\, n + \lambda - \beta\, \theta\, \chi}{\alpha + \beta} + \beta\, \theta$$

et:

(9) $$g_E = \frac{\alpha\, n + \lambda - \beta\, \theta\, \chi}{\alpha + \beta} \ ,$$

de (5):

(10)

$$g_\theta = \frac{\alpha\, n + \lambda - \beta\, \theta\, \chi}{\alpha + \beta} + \beta\, \theta - \theta\, s = \frac{\alpha\, n + \lambda - \beta\, \theta\, \chi - \theta\, s\, (\alpha + \beta)}{\alpha + \beta} + \beta\, \theta$$

$$= \frac{\alpha\, n + \lambda - \beta\, \theta\, (\chi + s) - \theta\, (1 - \chi)\, \alpha}{\alpha + \beta} + \beta\, \theta = \frac{\alpha\, n + \lambda + \alpha\, \theta\, \chi}{\alpha + \beta} - (1 - \beta)\, \theta$$

et de (6):

(11) $$g_C = g_\chi + \frac{\alpha\, n + \lambda - \beta\, \theta\, \chi}{\alpha + \beta} + \beta\, \theta \ ,$$

(12)

$$g_{C/K} = g_\chi + g_\theta = g_C - g_Q + g_\theta$$

$$= g_\chi - \frac{\alpha\, n + \lambda - \beta\, \theta\, \chi}{\alpha + \beta} - \beta\, \theta + \frac{\alpha\, n + \lambda + \alpha\, \theta\, \chi}{\alpha + \beta} - (1 - \beta)\, \theta$$

$$= g_\chi + \theta\, \chi - \theta = g_C - \theta\, s \ .$$

Une croissance équilibrée et durable à long terme de la production et de la consommation fondée sur une ressource naturelle épuisable est possible (bien qu'elle soit inférieure à celle réalisable avec une ressource non épuisable) si le ratio consommation/capital ne croît pas, c'est-à-dire si $g_{C/K} = 0$, et si le coefficient de capital ne croît pas, c'est-à-dire si $g_\theta = 0$:

(13) $$g_C - \theta\, s = 0 \Leftrightarrow s = \frac{g_C}{\theta} \ ,$$

(14)

$$g_\theta = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha\, n + \lambda + \alpha\, \theta\, \chi}{\alpha + \beta} - (1-\beta)\, \theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha\, n + \lambda + \alpha\, \theta\, \chi = (\alpha + \beta)(1-\beta)\, \theta$$

$$\Leftrightarrow \alpha\, n + \lambda = \theta\left[\beta(1-\alpha-\beta) + \alpha(1-\chi)\right]$$

$$= \theta\,(\beta\, \gamma + \alpha\, s) = \theta\left(\beta\, \gamma + \alpha \frac{g_C}{\theta}\right)$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\lambda + \alpha\,(n - g_C)}{\beta\, \gamma}$$

d'où l'on tire à partir de (13):

(15) $$s = \frac{\beta\, \gamma\, g_C}{\lambda + \alpha\,(n - g_C)}$$

et (16) $$g_C = \frac{s\,(\alpha\, n + \lambda)}{\beta\, \gamma + s\, \alpha}\ ,$$

et par suite le taux de prélèvement de la ressource environnementale peut être exprimé soit en fonction de g_C , soit en fonction de s , avec dans chaque cas le taux $\mu = -g_E$ si on fait en sorte que le taux de croissance du taux de prélèvement soit nul, c'est-à-dire que ce taux de prélèvement soit constant ($g_\mu = g_E + \mu = 0$):

(17) $$\mu = \frac{\alpha\, n + \lambda - g_C\,(1-\beta)}{\gamma}$$

ou (18) $$\mu = \frac{(\alpha\, n + \lambda)(\beta - s)}{\beta\, \gamma + s\, \alpha}\ .$$

Quelles sont les conclusions du modèle de Stiglitz?

Le sentier de croissance équilibrée soutenable à long terme obéit aux conditions suivantes:

- Le taux de prélèvement de la ressource environnementale épuisable reste positif si le taux d'épargne est inférieur à la part de la rémunération du capital dans le produit total: à partir de (18): $\mu > 0 \Leftrightarrow s < \beta$;

ou bien encore si le taux de croissance de la consommation est inférieur au rapport suivant: à partir de (17): $\mu > 0 \Leftrightarrow g_C < \dfrac{\alpha\, n + \lambda}{1-\beta}$.

- La consommation augmente si le taux de progression des techniques est supérieur à l'opposé du produit de la part de la rémunération du travail et du taux de croissance démographique: à partir de (16):

$$g_C > 0 \Leftrightarrow \lambda > -\alpha\, n = \gamma\, n - n\,(1 - \beta) = \gamma\, n - n\,(\alpha + \gamma).$$

- La consommation par tête reste au moins constante si le taux de croissance de la consommation est au moins égal à celui de la croissance démographique: à partir de (16):

$$g_C \geq n \Leftrightarrow \frac{s\,(\alpha\, n + \lambda)}{\beta\,\gamma + s\,\alpha} \geq n \Leftrightarrow \lambda \geq \frac{n\,\gamma\,\beta}{s} \;;$$

comme $\frac{\beta}{s} > 1$, alors $\lambda > n\,\gamma \Leftrightarrow \frac{\lambda}{\gamma} > n$, c'est-à-dire que le taux de progression des techniques rapporté à l'élasticité de la production par rapport au facteur naturel doit être supérieur au taux de croissance démographique.

- Dans le cas où les taux de progrès technique et de croissance démographique sont nuls et où la consommation par tête est constante ($\lambda = n = g_C = 0$), l'équation (12) devient:

$$g_{C/K} = -\theta\, s \Leftrightarrow -g_K = -\theta\, s \Leftrightarrow s = \frac{g_K}{\theta}$$

$$= \frac{\dot{K}}{K}\frac{K}{Q} = \frac{\dot{K}}{Q} = \frac{\frac{\dot{K}}{E}}{\frac{Q}{E}} = \frac{\frac{\dot{K}}{E}}{\frac{p}{\gamma}} = \frac{\dot{K}}{E}\frac{\gamma}{p} \;,$$

or, comme le prix de chaque facteur est égal à sa productivité marginale, $E\,p = \gamma\,Q$, et que, en vertu de la règle de Hartwick, le montant des rentes rémunérant le facteur naturel doit être réinvesti pour accroître le capital remplaçant la ressource s'épuisant, il s'en suit:

$$s = \frac{\dot{K}}{\dot{K}}\gamma = \gamma \;,$$

ce qui signifie que le taux d'épargne doit être égal à la part de la rémunération du facteur naturel dans le produit et inférieur à celle du capital: on a donc: $s = \gamma < \beta$, pour indiquer que même sans progrès technique l'accumulation du capital permet de compenser la raréfaction du facteur naturel.

- En introduisant une fonction d'utilité telle que celle présentée dans le modèle de Hotelling, Stiglitz montre que non seulement la croissance est possible mais qu'elle est optimale puisqu'elle permet de maintenir au cours du temps la consommation par tête malgré l'épuisement des ressources. Cependant, la stabilité de cette croissance est précaire car aucune force de marché n'est capable de ramener le taux d'utilisation des ressources vers sa trajectoire optimale si celle-ci n'a pas été adoptée dès le départ. Comme le notent Sylvie Faucheux et Jean-François Noël, la règle de Hotelling est une condition nécessaire mais non suffisante d'une bonne gestion des ressources naturelles au cours du temps[1]. Sous cette restriction, la croissance optimale dépend de l'une ou l'autre des trois conditions suivantes: ou bien l'élasticité de substitution entre environnement et capital ou travail est constante et égale à un et la part du produit rémunérant le capital est supérieure à celle rémunérant le facteur naturel, ou bien l'élasticité est constante et supérieure à un, ou bien elle n'est pas constante et le progrès technique permet de se dispenser de plus en plus de la ressource qui s'épuise.

Finalement, on remarquera combien est important le choix d'une fonction Cobb-Douglas à rendements constants ($Q = L^{\alpha} K^{\beta} E^{\gamma}$ avec L le facteur travail, K le facteur capital et E le facteur environnement et avec $\alpha+\beta+\gamma = 1$) pour formuler le modèle de Stiglitz: une fonction de type multiplicatif permet de considérer la minoration d'un facteur par la diminution de son exposant et non par sa propre disparition; la compensation par le progrès technique de l'épuisement des ressources naturelles se traduit par l'augmentation de β au fur et à mesure que γ tend vers zéro; de ce fait E tend vers l'unité au lieu de tendre vers zéro, et le produit ne dépend plus progressivement du facteur naturel. CQFD: l'économie ne dépend plus de l'écologie! C'est toute la magie d'une fonction mathématique *ad hoc* pour l'économie. La magie concerne-t-elle aussi l'*économie* des ressources naturelles?...

[1]. FAUCHEUX S., NOEL J.F., *Economie des ressources naturelles et de l'environnement*, op. cit., p. 251, note 8.